

Représentation et analyse chromatique de l'influence des valeurs numériques dans les codes de calcul

David DEFOUR

Franck VEDRINE

Yves LHUILLIER

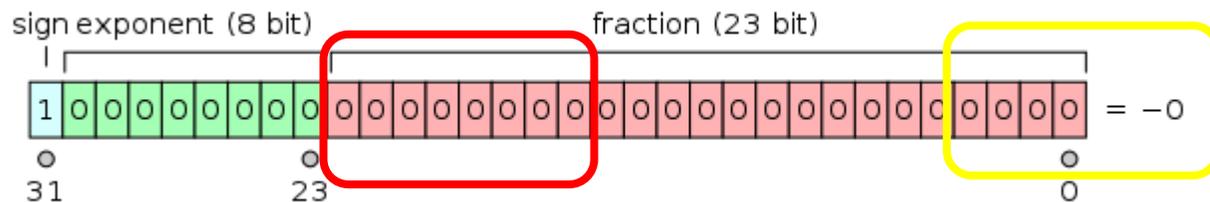


Constats

- Depuis 50 ans on s'intéresse à l'analyse de l'arithmétique flottante sous l'angle de la propagation des erreurs d'arrondis (impact sur les bits de poids faibles)
- Depuis quelques années on voit l'émergence de l'utilisation de format réduit (FP16, BF16, ...) sous l'impulsion que seuls les bits de poids forts comptent avec un intérêt limité sur la propagation des erreurs d'arrondis (on ne considère que les bits de poids forts)
- Pas (peu ?) d'outils/méthodes d'analyses centrées sur les bits de poids fort.

Objectifs

1. Être capable d'identifier quelles sont les données les plus impactantes dans le/les résultats d'un programme (Inverse de l'analyse de sensibilité)
2. Fournir une interprétation visuelle du poids relatif des variables/valeurs numériques
3. Identifier des problèmes numériques comme les cancellations



Analyse d'erreur standard :

- Que se passe-t-il sur les bits de poids faibles ?

Analyse chromatique :

- **Qui** impacte le plus les bits de poids forts ?

Exemple 1: Addition1

- $X = 2^{52}$;
- $Y = 2^0$;
- $Z = X+Y$;

x 

y 



Exemple 1: Addition2

- $X = 2^{52}$;
- $Y = 2^{10}$;
- $Z = X+Y$;

x 

y 



Exemple 1: Addition3

- $X = 3.141592 * 2^{52}$;
- $Y = 3.141592 * 2^{10}$;
- $Z = X+Y$;

Notion de poids relatif

X 

Y 



Exemple 2: Multiplication

- $X = 3.141592 * 2^{52}$;
- $Y = 3.141592 * 2^{10}$;
- $Z = X * Y$;

X 

Y 

Z 

=> X & Y contribuent de manière identique dans les bits du produits indépendamment de leurs valeurs.

Opérations

- Utilisation d'une structure de données:
 - V: Valeurs manipulées
 - D: Dictionnaire du poids relatifs des valeurs suivies
- **Affectation:**
- X=(16, Tracking=True)
 - X={V= 16;
D={'1': 1}}

Opérations

- Utilisation d'une structure de données:
 - V: Valeurs manipulées
 - D: Dictionnaire du poids relatifs des valeurs suivies
- **Affectation:**
- X=(16, Tracking=True)
 - X={V= 16;
D={'X': 1}}
- Y=(1, Tracking=True)
 - X={V= 1;
D={'Y': 1}}

Opérations

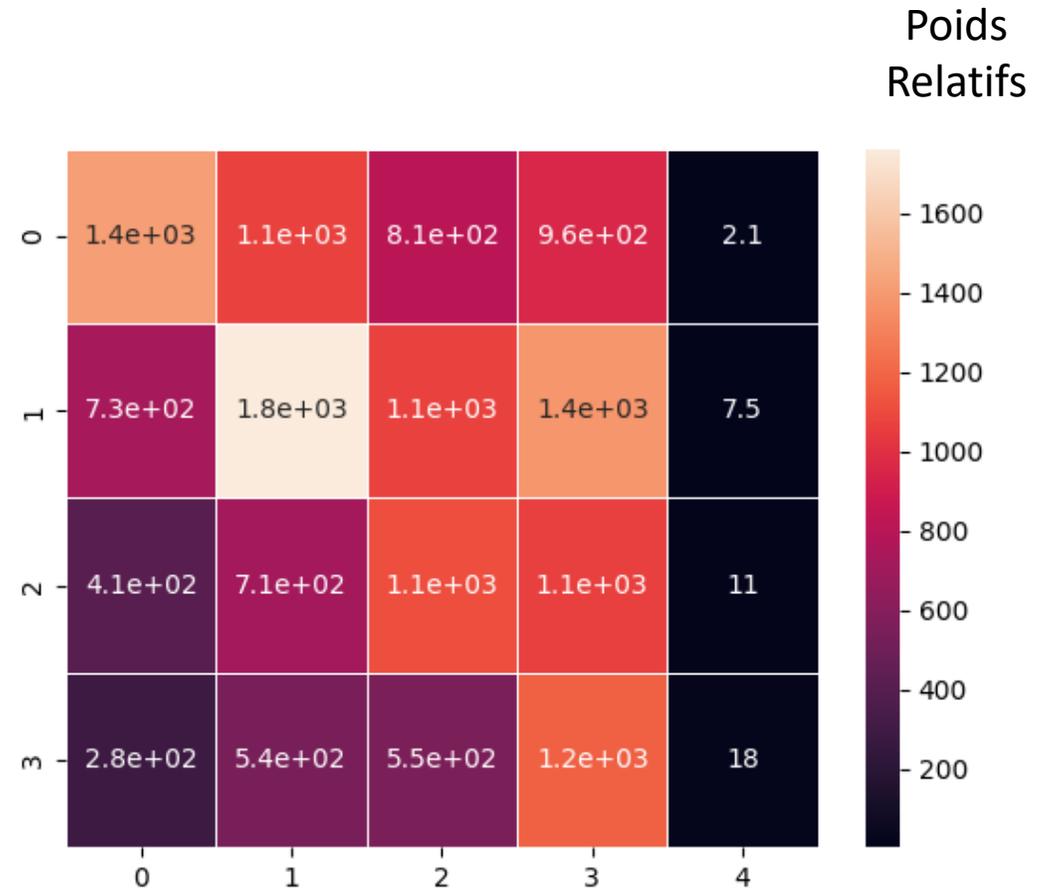
- Utilisation d'une structure de données:
 - V: Valeurs manipulées
 - D: Dictionnaire du poids relatifs des valeurs suivies
- Affectation:
- $X=(16, \text{Tracking}=\text{True})$
 - $X=\{V= 16;$
 $D=\{'X': 1\}\}$
- $Y=(1, \text{Tracking}=\text{True})$
 - $X=\{V= 1;$
 $D=\{'Y': 1\}\}$
- **Addition:**
- $R=X+Y;$
 - $R=\{V= 17;$
 $D=\{'X': 0.9411\dots=\frac{16}{17};$
 $\text{'Y': } 0.0589\dots=\frac{1}{17}\}\}$

Opérations

- Utilisation d'une structure de données:
 - V: Valeurs manipulées
 - D: Dictionnaire du poids relatifs des valeurs suivies
- Affectation:
- **X=(16, Tracking=True)**
 - X={V= 16;
D={'X': 1}}
- **Y=(1, Tracking=True)**
 - X={V= 1;
D={'Y': 1}}
- **Multiplication:**
- **R=X*Y;**
 - R={V= 16;
D={'X': 0.5;
'Y': 0.5}}

Exemple 1: Hilbert & Gauss

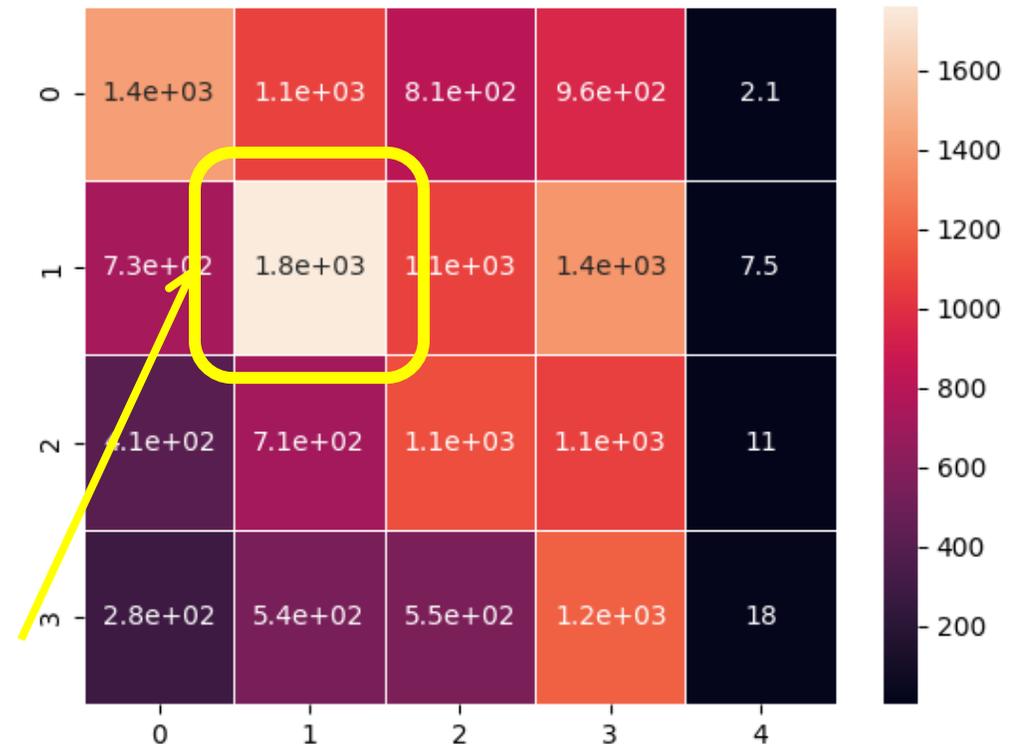
```
[[1/1.,1/2.,1/3.,1/4., 10.],  
 [1/2.,1/3.,1/4.,1/5., 20.],  
 [1/3.,1/4.,1/5.,1/6., 30.],  
 [1/4.,1/5.,1/6.,1/7., 40.]]
```



Exemple 1: Hilbert & Gauss

```
[[1/1.,1/2.,1/3.,1/4., 10.],  
 [1/2.,1/3.,1/4.,1/5., 20.],  
 [1/3.,1/4.,1/5.,1/6., 30.],  
 [1/4.,1/5.,1/6.,1/7., 40.]]
```

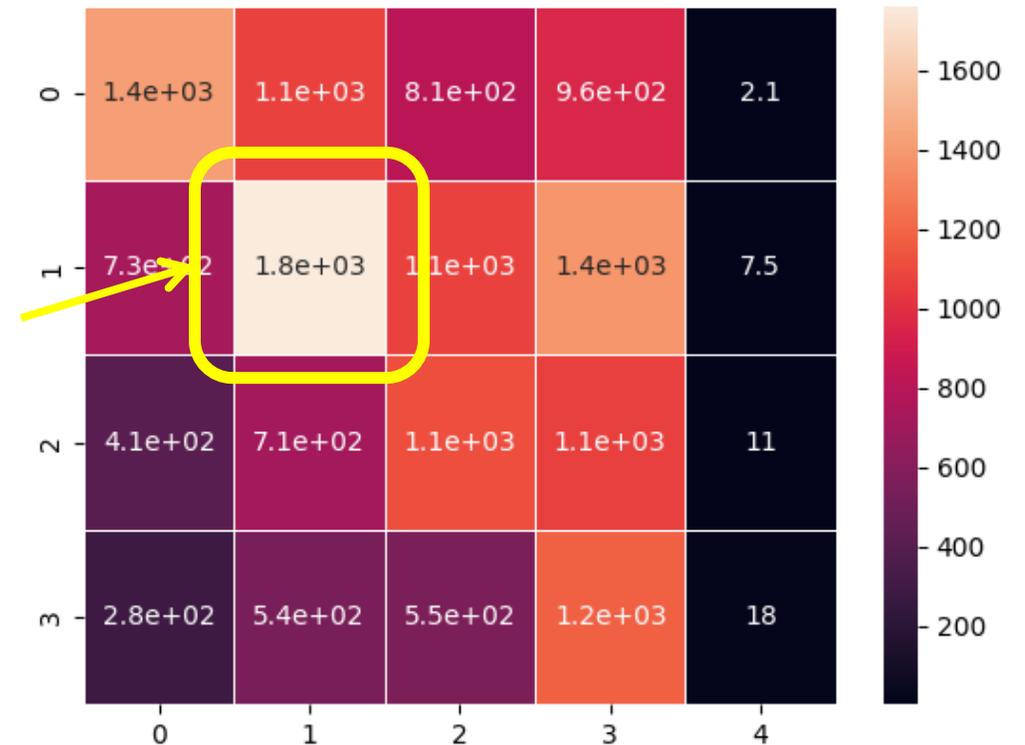
1. Être capable d'identifier quelles sont les données les plus impactantes dans le/les résultats d'un programme (Inverse de l'analyse de sensibilité)
Valeurs représentées =
Norm1 du poids relatifs dans le vecteur résultat



Exemple 1: Hilbert & Gauss

```
[[1/1.,1/2.,1/3.,1/4., 10.],  
 [1/2.,1/3.,1/4.,1/5., 20.],  
 [1/3.,1/4.,1/5.,1/6., 30.],  
 [1/4.,1/5.,1/6.,1/7., 40.]]
```

Question : Pourquoi a-t-on des valeurs >1 ?

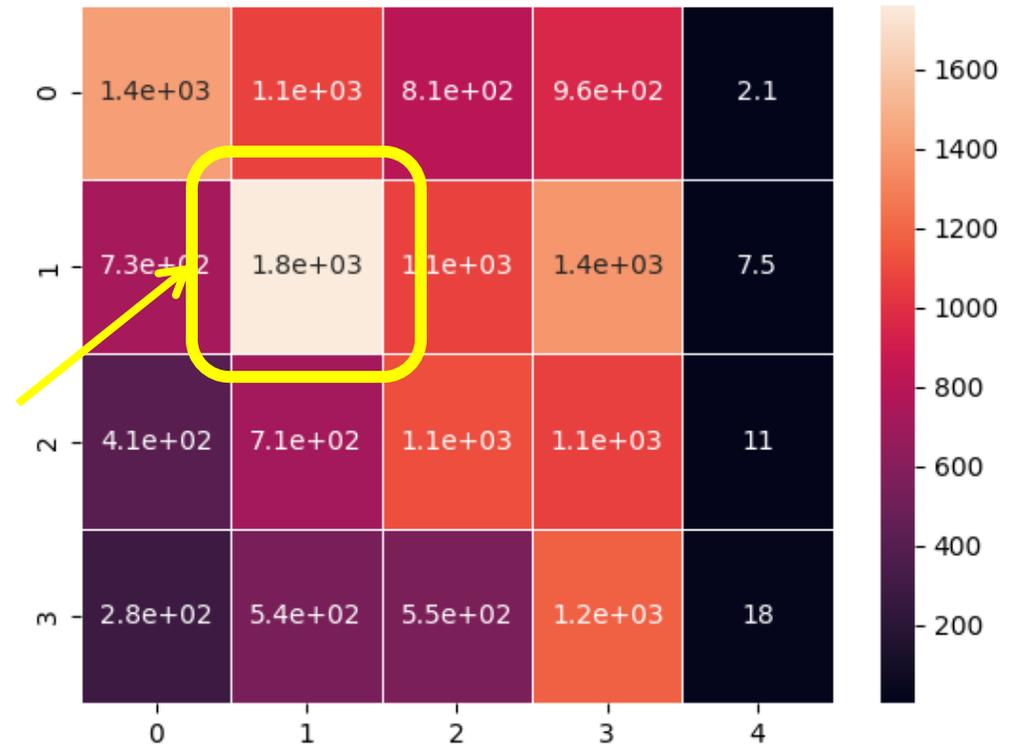


Exemple 1: Hilbert & Gauss

```
[[1/1.,1/2.,1/3.,1/4., 10.],  
 [1/2.,1/3.,1/4.,1/5., 20.],  
 [1/3.,1/4.,1/5.,1/6., 30.],  
 [1/4.,1/5.,1/6.,1/7., 40.]]
```

Question : Pourquoi a-t-on des valeurs >1 ?

Réponse 1 : Parce que l'on utilise la norme 1 sur 4 valeurs !



Exemple 1: Hilbert & Gauss

```
[[1/1.,1/2.,1/3.,1/4., 10.],
 [1/2.,1/3.,1/4.,1/5., 20.],
 [1/3.,1/4.,1/5.,1/6., 30.],
 [1/4.,1/5.,1/6.,1/7., 40.]]
```

Question : Pourquoi a-t-on des valeurs >1 ?

Réponse 2 : (compléments)

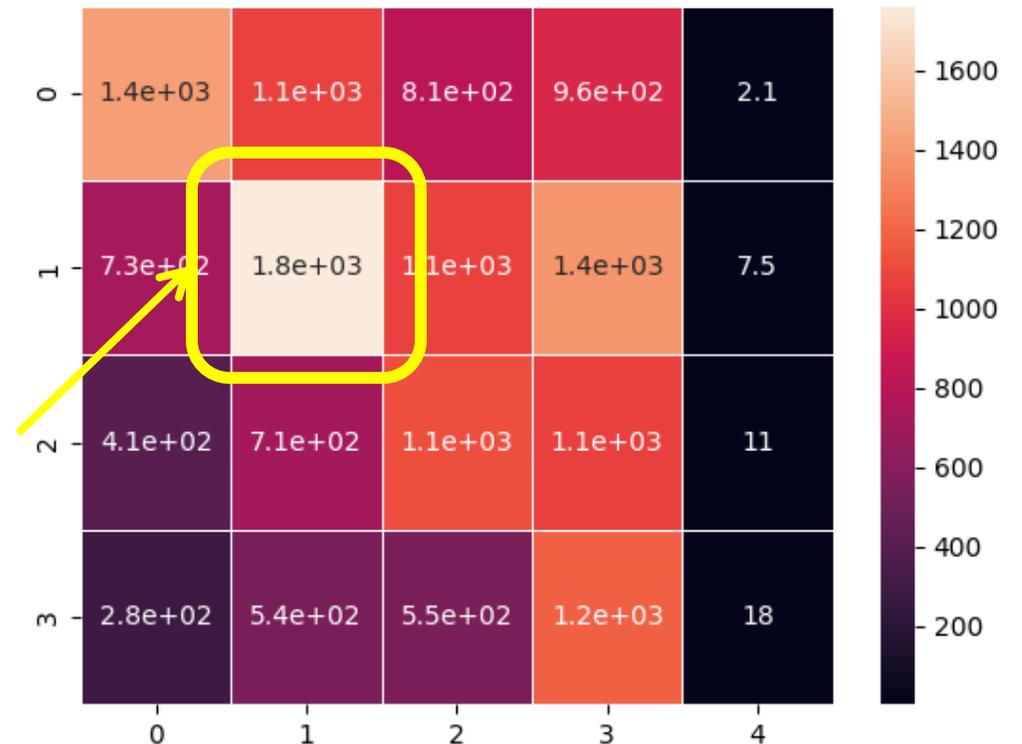
- Ajout du poids de chaque variable, pondéré par la valeur résultat

(=> intégration des cancellations similaires au calcul du conditionnement)

$$X = \left\{ V_x, \{id_{(x,i)} : p_{id(x,i)}\} \right\}$$

$$Y = \left\{ V_y, \{id_{(y,i)} : p_{id(y,i)}\} \right\}$$

$$Z = X + Y = \left\{ V_z = V_x + V_y, \{id_{(z,i)} : \left| \frac{V_x}{V_z} \right| p_{id(x,i)} + \left| \frac{V_y}{V_z} \right| p_{id(y,i)} \} \right\}$$

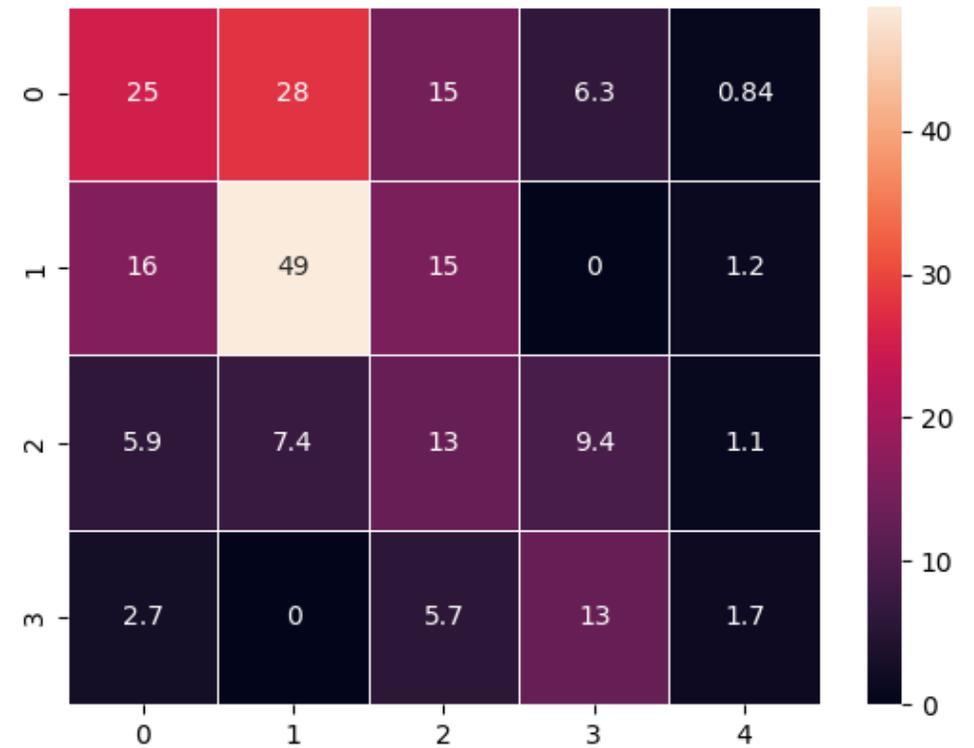


Exemple 1: Hilbert & Gauss

- Analyse:
 - Donne une estimation du poids de chaque donnée en entrée dans le vecteur résultat
 - Donne le détail du conditionnement (et des pb de cancellation)
 - Permet de localiser les données les plus problématiques

Exemple 2: Wilson & Gauss

```
[[5., 7., 6., 5., 1.],  
 [7., 10., 8., 7., 2.],  
 [6., 8., 10., 9., 3.],  
 [5., 7., 9., 10., 4.]]
```



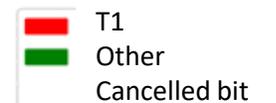
Exemple 3: Pi & Archimède

```
t1 = 1/math.sqrt(3)
```

```
for i in range(1, N):  
    t2 = (math.sqrt(t1*t1+1.0) - 1.0)/t1  
    t1 = t2
```

Evolution of T1 weight in the computed results of PI with Archimede's iterations

Iteration N°: 1 Value: 0.2679491924311229

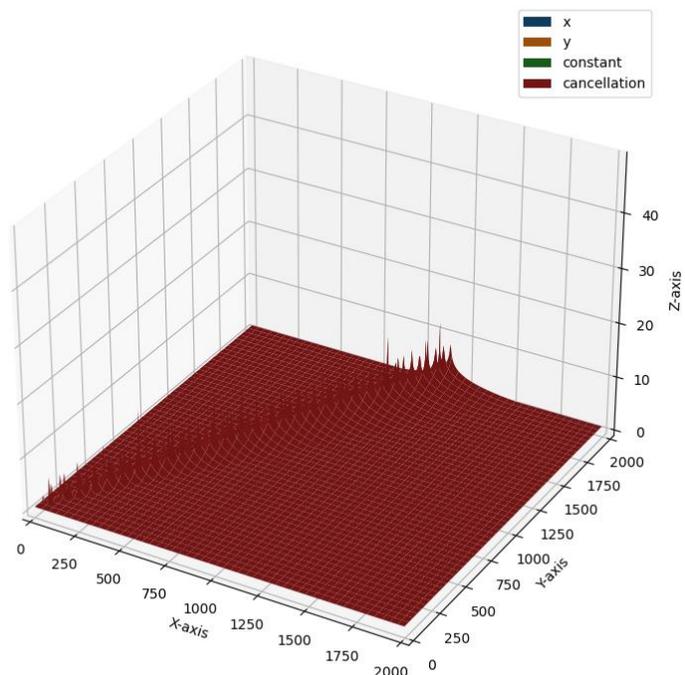
 T1
Other
Cancelled bit



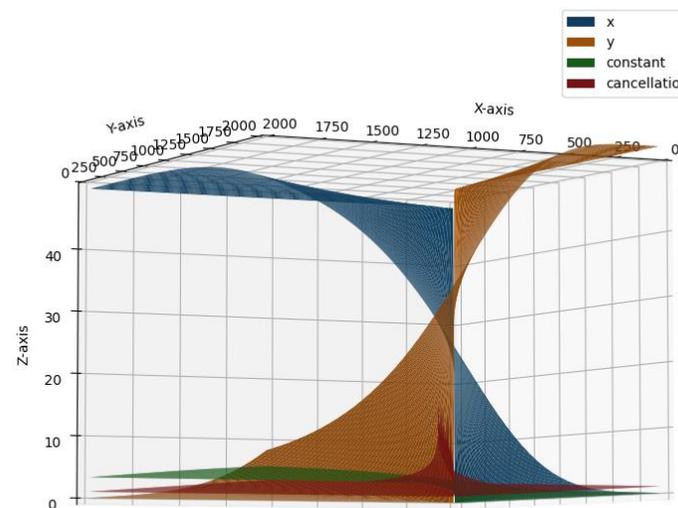
Exemple 4: Polynôme bivarié

Impact of x,y, constant and cancellation in the computation of $F(x,y)=9.x^{**4} - y^{**4} + 2.y^{**2}$

- x
- y
- constant
- cancellation



Impact of x,y, constant and cancellation in the computation of $F(x,y)=9.x^{**4} - y^{**4} + 2.y^{**2}$



Exemple à faire tourner

Conclusion

- Permet
 1. Quantifier le poids de certaines valeurs dans le résultat final
 2. Identifier les cancellations (analyse du conditionnement)
 3. **Offrir un support graphique** pour mieux comprendre les résultats numériques
- Analyse complémentaire des analyses classiques sur les erreurs d'arrondis
- Travail en cours
 - Coupler cette analyse avec d'autres (ex: analyse de sensibilité)
 - Coût Mémoire & Calcul: $O(\text{nb de variable suivit})$
 - Réduction du coût (limiter les variables suivies à celles ayant un impact, éliminer celles dont le poids relatif est $<$ à une certaine constante)
- Travaux futurs
 - Analyse sur des exemples concrets (ex: Réseaux de neurones)

